

# Typage et Analyse Statique

## Exercices cours 1

Emmanuel Chailloux

Parcours Science et Technologie du Logiciel  
Master mention Informatique  
Sorbonne Université

année 2021-2022

# Évaluation du $\lambda$ -calcul

Évaluation formelle :  $\beta$ -réduction :

1. On choisit un redex  $(\lambda x. T_1) T_2$  dans l'expression,
2. on remplace  $x$  par  $T_2$  dans  $T_1$ ,
3. on remplace le redex par ce résultat.
4. **Normalisation** : on continue tant qu'il y a des redexes.

# Stratégies d'évaluation du $\lambda$ -calcul et appel de fonction

Stratégies d'évaluation :

- ▶ réduction standard : le redex le plus externe gauche est réduit en premier
- ▶ réduction par valeur : le redex le plus interne à droite est réduit en premier
- ▶ sans stratégie : n'importe quel redex peut être réduit

Appels :

- ▶ appel par nom : utilise la stratégie standard mais ne réduit pas sous les  $\lambda$ s, l'argument est passé non évalué
- ▶ appel par valeur : le redex le plus externe est réduit une fois son membre droit lui-même réduit
- ▶ appel par nécessité : utilise la stratégie standard, mais réduira par nécessité une seule fois l'argument (en le nommant) s'il est utilisé plusieurs fois dans le corps de la fonction (évaluation paresseuse)

## Extensions du $\lambda$ -calcul

Par encodage (ex : les couples) :

- ▶ Construction :  $CONS := \lambda x.\lambda y.(\lambda f.f x y)$
- ▶ Projection 0 :  $P0 := \lambda c.c (\lambda a.\lambda b.a)$
- ▶ Projection 1 :  $P1 := \lambda c.c (\lambda a.\lambda b.b)$
- ▶ Échange :  $SWAP := \lambda c.c (\lambda x.\lambda y.CONST y x)$

Par ajout de termes/opérations de base (ex : entiers) :

- ▶  $val ::= var \mid int \mid add \mid sub$
- ▶  $term ::= \lambda var.term \mid term term \mid val$
- ▶ Ex :  $\lambda x.\lambda y.add x (sub y 3)$

# Évaluation

Comment évaluer  $CONS\ 1\ 2$  en pratique ?

- ▶ Réécriture de termes :  $CONS\ 1\ 2 = \lambda f.f\ 1\ 2$   
en pratique, difficile de modifier le code du programme.

- ▶ Fermetures :

$CONS\ 1\ 2$

→  $(\lambda x.\lambda y.\lambda f.f\ x\ y)[]\ 1\ 2$

→  $(\lambda y.\lambda f.f\ x\ y)_{[(x,1)]}\ 2$

→  $(\lambda f.f\ x\ y)_{[(x,1);(y,2)]}$

On crée une **fermeture** :

- ▶ corps de la fonction,
- ▶ environnement : valeurs des variables lors de l'abstraction.

Lors de l'appel, on exécute le corps dans l'environnement, augmenté de la valeur du paramètre.

## Exemple en OCaml

```
# let f x y z = x + y + z ;;
val f : int -> int -> int -> int = <fun>
# f 1 ;;
- : int -> int -> int = <fun>
# let g = f 1 2 ;;
val g : int -> int = <fun>
# g 10 ;;
- : int = 13
# g 10 20 ;;
Error: This function is applied to too many arguments;
maybe you forgot a ';'
#
```

# Un Évaluateur de $\lambda$ -calcul

Fabriquer une valeur calculable de la forme  $\text{terme}_{\text{env}}$ .

env	terme	pile	$\rightarrow$ env	term	pile
$e$	$F A$	$S$	$\rightarrow e$	$F$	$A_e :: S$
$e$	$\lambda x.C$	$a :: S$	$\rightarrow (x, a) :: e$	$C$	$S$
$(= x, A_{e'}) :: e$	$x$	$S$	$\rightarrow e'$	$A$	$S$
$(\neq x, \_) :: e$	$x$	$S$	$\rightarrow e$	$x$	$S$

# Une machine fonctionnelle : la machine de Krivine

- ▶ Exécute du code-octet, compilé depuis un lambda terme,
- ▶ code-octet complètement linéaire (suite d'opcodes),
- ▶ trois opcodes très simples.

De quoi a-t'on besoin ?

env	terme	pile		env	term	pile
$e$	$F A$	$S$	$\rightarrow$	$e$	$F$	$A_e :: S$
$e$	$\lambda x.C$	$a :: S$	$\rightarrow$	$(x, a) :: e$	$C$	$S$
$(= x, A_{e'}) :: e$	$x$	$S$	$\rightarrow$	$e'$	$A$	$S$
$(\neq x, \_) :: e$	$x$	$S$	$\rightarrow$	$e$	$x$	$S$



# Machine virtuelle

```
type closure = C of int * closure list

let interprete code =
  let rec interp env pc stack =
    match (nth code pc) with
    | ACCESS n ->
      begin try
        let (C (n,e)) = nth env n in
          interp !e n stack
        with ex -> (C (pc, ref env)))
    | PUSH n ->
      interp env (pc+1) ((C (n,ref env))::stack)
    | GRAB ->
      begin match stack with
      | [] -> C (pc,ref env)
      | so::s -> interp (so::env) (pc+1) s)
  in
  interp [] 1 []
```

# Compilation vers la machine de Krivine

Assembleur avec étiquettes :

```
type instr =  
  | IPUSH of lbl  
  | IGRAB  
  | IACCESS of int  
  | ILABEL of lbl
```

Schéma de compilation  $\mathcal{C}$  :

$$\mathcal{C}_e(T_1 T_2) = \text{IPUSH } l ; \mathcal{C}_e(T_1) ; \text{ILABEL } l ; \mathcal{C}_e(T_2)$$

$$\mathcal{C}_e(\lambda x. T) = \text{IGRAB} ; \mathcal{C}_{x::e}(T)$$

$$\mathcal{C}_e(x) = \text{IACCESS } nth(x, e)$$

Puis on fait une passe de suppression des étiquettes.