

Typage et Analyse Statique

Cours 1

Emmanuel Chailloux

Spécialité Science et Technologie du Logiciel
Master mention Informatique
Sorbonne Université

année 2020-2021

Plan du cours 1

- ▶ termes, substitution, α -conversion, β -réduction
- ▶ codage de données en λ -calcul
 - ▶ booléens,
 - ▶ couples
 - ▶ entiers (Church, Barendregt)
- ▶ codage de contrôle : la récursion
- ▶ forme normale
- ▶ stratégies de réduction

Le λ -calcul a été inventé par Alonzo Church en 1932.

Le but de Church était de définir la notion de calculabilité effective au moyen de la λ -définissabilité.

Cette notion est équivalente aux notions de calculabilité au sens de Turing (machine de Turing) et de Gödel-Herbrand (fonctions récursives).

Cette coïncidence incite à penser qu'il existe une notion de calculabilité universelle, indépendante des formalismes particuliers : c'est la thèse de Church.

Le but de ce cours est de présenter brièvement le λ -calcul, qui sert de base théorique à tout langage fonctionnel bien conçu. Plus qu'un cours formel, il s'agit d'une introduction qu'on espère motivante et qui pourra inciter le lecteur intéressé à consulter la littérature pour plus de détails (voir bibliographie). C'est pourquoi on n'y trouvera guère de démonstrations.

bibliographie

- ▶ Hindley and Seldin. Introduction to Lambda-Calculus and combinators Cambridge University Press, 1986.
- ▶ Chantal Berline. une introduction au lambda-calcul, cours au dea de logique 2001-2003 (cf <https://www.irif.fr/~berline/Cours.html>).

Termes (1)

On se donne un ensemble V infini dénombrable de variables. On définit les termes inductivement comme suit :

- ▶ Si $x \in V$ alors x est un terme
- ▶ Si $x \in V$ et M est un terme, alors $\lambda x.M$ est un terme ; c'est la fonction qui, à x , associe M (qui, en général, dépend de x). On dit que la variable x est abstraite dans M .
- ▶ Si M et N sont des termes, alors MN est un terme. C'est l'application de M (à considérer comme une fonction) à N (à considérer comme son argument).

Termes (2)

Tout de suite quelques exemples :

- ▶ L'identité : $\lambda x.x$, ou bien $\lambda y.y$ ou bien...
- ▶ On peut l'appliquer à elle-même : $(\lambda x.x)(\lambda x.x)$.
- ▶ $K = \lambda x.\lambda y.x$

Pour alléger les notations, on écrira souvent

- ▶ $\lambda x_1 x_2 \dots x_n.M$ au lieu de $\lambda x_1.\lambda x_2.\dots.\lambda x_n.M$,
- ▶ et $M_1 M_2 \dots M_k$ au lieu de $(\dots((M_1 M_2) M_3) \dots) M_k$.

On remarquera que ce sont les conventions habituelles d'OCaml.

Substitution

La substitution aux occurrences libres (non liées à un λ) d'une variable x d'un terme M par un terme N sera notée $M[N/x]$ (où N écrase x dans M).

Définition

Pour tout terme N, M et pour n'importe quelle variable x , le résultat ($M[N/x]$) de la substitution de toutes les occurrences libres de x dans M par N est définie de la manière suivante :

1. $x[N/x] \equiv N$
2. $y[N/x] \equiv y$ pour tout $y \neq x$
3. $(M_1 M_2)[N/x] \equiv (M_1[N/x])(M_2[N/x])$
4. $(\lambda x. Y)[N/x] \equiv \lambda x. Y$
5. $(\lambda y. Y)[N/x] \equiv (\lambda y. Y[N/x])$ si $y \neq x$, et $y \notin N$ ou $x \notin Y$
6. $(\lambda y. Y)[N/x] \equiv (\lambda z. Y[z/y][N/x])$ si $y \neq x$ et $y \in N$ et $x \in Y$ où z est une nouvelle variable.

α -conversion

On remarque dans ces exemples que le nom des variables liées dans un terme n'a aucune importance. Cela se traduit par la règle d' α -conversion :

$$\lambda x.M \equiv \lambda y.M[y/x]$$

si x n'est pas liée dans M et y ne figure pas libre ou liée dans M . L'importance de cette règle apparaîtra avec la β -conversion.

Exemples :

- ▶ $\lambda x.xy \equiv \lambda z.zy$ mais $\lambda x.xy \not\equiv \lambda y.yy$.
- ▶ $\lambda x.yx \equiv \lambda z.yz$ mais $\lambda x.yx \not\equiv \lambda y.yy$

β -réduction (1)

C'est la règle fondamentale du λ -calcul. Un terme de la forme $(\lambda x.M)N$ est appelé *redex*. Voici la réduction d'un redex :

$$(\lambda x.M)N \rightarrow_0 M[N/x]$$

à condition que x n'apparaisse pas libre dans N (si c'est le cas, faire une α conversion sur $\lambda x.M$) et qu'aucune variable libre de N ne soit capturée dans M (là aussi faire une α conversion sur M). Le terme de droite est appelé *réduit*.

β -réduction (2)

Ce qu'on appellera β -réduction, c'est la réduction d'un redex à l'intérieur d'un terme. Plus précisément, c'est la relation de réduction \rightarrow définie par :

- ▶ Si $M \rightarrow_0 M'$ alors $M \rightarrow M'$.
- ▶ Si $M \rightarrow M'$ alors $\lambda x.M \rightarrow \lambda x.M'$.
- ▶ Si $M \rightarrow M'$ alors $MN \rightarrow M'N$.
- ▶ Si $N \rightarrow N'$ alors $MN \rightarrow MN'$.

C'est grâce à cette règle que le λ -calcul est véritablement un calcul.

Booléens (1)

En λ -calcul pur nous pouvons représenter les booléens par des λ -termes. Une représentation possible est la suivante :

- ▶ $T = \lambda xy.x$
- ▶ $F = \lambda xy.y$

opérateur conditionnel : fonction qui prend comme arguments une condition c et deux expressions e_1 et e_2 . Cette fonction doit retourner e_1 , si c évalue à T , et e_2 si c évalue à F , ce qui conduit à la définition suivante :

- ▶ **cond** = $\lambda ce_1e_2.((c e_1) e_2)$

Booléens (2)

Essayons. Soient $E1$ et $E2$ deux λ -termes quelconques.

$$\begin{aligned} \text{cond } T \ E1 \ E2 & \\ &= (\lambda c e_1 e_2. ((c \ e_1) \ e_2)) \ T \ E1 \ E2 \\ &\rightarrow ((T \ E1) \ E2) \\ &= (((\lambda xy. x) \ E1) \ E2) \\ &\rightarrow (\lambda y. E1) \ E2 \\ &\rightarrow E1 \end{aligned}$$

Naturellement on peut, pour se faciliter la vie, se définir des abréviations comme la suivante :

- ▶ **if c then e1 else e2 = cond c e1 e2**

Booléens (3)

Comment définir les connecteurs logiques à partir de `cond` ?

- ▶ **not e1** = *if e1 then F else T*
cond e1 F T
- ▶ **or e1 e2** = *if e1 then T else e2*
cond e1 T e2
- ▶ **and e1 e2** = *if e1 then e2 else F*
cond e1 e2 F

Couples (1)

On a besoin d'un constructeur, appelé ici **cons**, qui prend deux éléments et retourne un couple et de deux accesseurs **fst** et **snd** qui prenant un couple (a, b) retourne respectivement a et b , c'est-à-dire vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}fst (cons a b) &= a \\snd (cons a b) &= b\end{aligned}$$

Pour la fonction **cons** nous pouvons donner la définition :

► **cons** = $\lambda xyf.f \times y$

Appliquée à A et B elle donne :

$$\begin{aligned}cons A B &= (\lambda xyf.f \times y) A B \\&\rightarrow \lambda f.f A B\end{aligned}$$

Couples (2)

Or le terme $\lambda f. f A B$ est capable de capturer des termes qui remplaceront f . En particulier nous pouvons remplacer f par des fonctions `first` et `second` capables de sélectionner le premier ou le deuxième parmi les arguments auxquelles elles sont appliquées :

▶ **first** = $\lambda xy.x$

▶ **second** = $\lambda xy.y$

`fst` et `snd` seront ainsi définies :

▶ **fst** = $\lambda x.(x \text{ first})$

▶ **snd** = $\lambda x.(x \text{ second})$

Entiers de Church (1)

Un nombre est représenté comme un terme qui représente n applications successives d'une fonction à un argument (si le nombre en question est n). Le nombre n sera représenté par $\lambda fx.f^n x$

▶ $\bar{0} = \lambda fx.x$

▶ $\bar{1} = \lambda fx.f x$

▶ $\bar{2} = \lambda fx.f(f x)$

▶ $\bar{n} = \lambda fx.f^n x$ ce qui équivaut à $\lambda fx.(f(f \dots (f x) \dots))$

Entiers de Church (2)

La fonction successeur, σ , doit prendre un numéral n de la forme $\lambda f x. f^n x$ et rendre $\lambda f x. f(f^n x)$. On peut « ouvrir » le numéral \bar{n} en l'appliquant à deux arguments quelconques, par exemple à f et à x :

$$(\lambda f x. f^n x) f x \rightarrow f^n x$$

Pour obtenir le successeur de \bar{n} il faut donc « capturer » n , l'ouvrir, lui ajouter un f en tête, et « laisser », à la tête de tout ça un nouveau $\lambda f x$.

Ceci est fait par la fonction :

► $\sigma = \lambda n f x. f(n f x)$

Entiers de Church (3)

Nous pouvons à l'aide de σ définir des simples fonctions comme la somme

- ▶ $\text{add} = \lambda mn.m\sigma n$

.

et pour :

- ▶ $\text{mul} = \lambda mn.$

- ▶ $\text{exp} = \lambda mn.$

et prédécesseur ???

Entiers de Barendregt (1)

Cette représentation des entiers, qui vient de Barendregt, nous permettra d'utiliser le calcul sur les booléens que nous avons déjà défini.

Soient :

- ▶ $\bar{0} = \lambda x.x$
- ▶ $\sigma = \lambda n.\lambda f. ((f \ F) \ n)$

Si nous appliquons un numéral \bar{n} ($\bar{n} = \sigma^n \bar{0}$) à T (i.e. $\lambda xy.x$) nous obtenons de façon triviale T ou F , selon que \bar{n} est $\bar{0}$ ou un autre numéral :

$$\begin{aligned}\bar{0} \ T &= (\lambda x.x) (\lambda xy.x) \\ &\rightarrow \lambda xy.x \\ &= T\end{aligned}$$

Entiers de Barendregt (2)

Par contre

$$\begin{aligned}\bar{n} T &= (\lambda f.((f F) \overline{n-1}) (\lambda xy.x)) \\ &\rightarrow ((\lambda xy.x F) \overline{n-1}) \\ &\rightarrow (\lambda y.F \overline{n-1}) \\ &= (\lambda y.(\lambda ab.b) \overline{n-1}) \\ &\rightarrow (\lambda y.\lambda b.b) \\ &= F\end{aligned}$$

Définissons en outre :

- ▶ **iszero** = $\lambda n.(n \text{ first})$
- ▶ **pred1** = $\lambda n.(n \text{ second})$
- ▶ **pred** = $\lambda n.(\text{if } (\text{iszero } n) \text{ then } \bar{0} \text{ else } (\text{pred1 } n))$

Récursion (1)

En essayant de définir l'addition, on serait tenté de la définir de la façon suivante :

▶ $\text{add} = \lambda mn. \text{if } (\text{iszero } n) \text{ then } m \text{ else } \sigma(\text{add } m \text{ (pred } n))$

Or ceci ne marche pas, car « add » est purement une abbréviation, si bien qu'il faudrait remplacer son occurrence dans le corps de la définition par la définition elle-même, qui contient une occurrence de « add » qui doit être remplacée . . .et ainsi de suite.

La solution est donnée par l'opérateur de *point fixe* Y , qui a la propriété suivante : pour toute fonction F ,

$$(Y F) \cong F(Y F)$$

où \cong est l'équivalence engendrée par \rightarrow , appelée β -conversion. Plusieurs opérateurs, munis de cette propriété, ont été définis.

Récursion (2)

- ▶ $Y = (\lambda f.(\lambda s.f (s s)) (\lambda s.f (s s)))$

La somme sera alors définie en faisant d'abord une abstraction sur le symbole *add* dans la définition précédente, puis en appliquant *Y* :

- ▶ $add1 = \lambda fmn.if (iszero n) then m else succ(f m (pred n))$
- ▶ $add = Y add1$

Récursion (3)

Exemple :

$$\begin{aligned} \text{add } 9 \ 1 &\cong (Y \ \text{add1}) \ 9 \ 1 \\ &= (\lambda f.(\lambda s.f \ (s \ s)) \ (\lambda s.f \ (s \ s))) \ \text{add1} \ 9 \ 1 \\ &\rightarrow (\lambda s.\text{add1} \ (s \ s)) \ (\lambda s.\text{add1} \ (s \ s)) \ 9 \ 1 \\ &\rightarrow \text{add1} \ ((\lambda s.\text{add1} \ (s \ s))(\lambda s.\text{add1} \ (s \ s))) \ 9 \ 1 \\ &= \text{add1} \ (Y \ \text{add1}) \ 9 \ 1 \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} &= (\lambda fmn.\text{if} \ (\text{iszero} \ n) \ \text{then} \ m \ \text{else} \ \text{succ}(f \ m \ (\text{pred} \ n))) \ (Y \ \text{add1}) \ 9 \ 1 \\ &\rightarrow \text{if}(\text{iszero} \ 1) \ \text{then} \ 9 \ \text{else} \ \text{succ} \ ((Y \ \text{add1}) \ 9 \ (\text{pred} \ 1)) \\ &\rightarrow \text{if}(\text{iszero} \ 1) \ \text{then} \ 9 \ \text{else} \ \text{succ} \ ((Y \ \text{add1}) \ 9 \ 0) \\ &\rightarrow \text{succ} \ (\text{add1} \ (Y \ \text{add1}) \ 9 \ 0) \\ &\rightarrow \text{succ} \ (\text{if} \ (\text{iszero} \ 0) \ \text{then} \ 9 \ \text{else} \ \text{succ}((Y \ \text{add1}) \ 9 \ (\text{pred} \ 0))) \\ &\rightarrow \text{succ} \ 9 \\ &\rightarrow 10 \end{aligned}$$

Définitions et théorèmes (1)

On note \rightarrow^* la fermeture réflexive-transitive de la relation de conversion \rightarrow définie précédemment. (Donc $M \rightarrow^* N$ si et seulement si il existe une suite finie (M_1, \dots, M_n) avec $n \geq 1$ telle que $M = M_1$, $N = M_n$ et $M_1 \rightarrow M_2 \cdots M_n$.)

Théorème

(Church-Rosser) Soit M un λ -terme. Soient M_1 et M_2 des termes tels que $M \rightarrow^ M_1$ et $M \rightarrow^* M_2$. Il existe un terme N tel que $M_1 \rightarrow^* N$ et $M_2 \rightarrow^* N$.*

Ce théorème a une conséquence intéressante.

Définitions et théorèmes (2)

Définition

- ▶ On dit qu'un terme est en *forme normale* s'il ne possède aucun redex.
- ▶ On dit qu'un terme a une forme normale, ou qu'il est normalisable, s'il existe une réduction de ce terme (pour \rightarrow^*) qui mène à une forme normale.
- ▶ On dit qu'il est fortement normalisable si toute réduction pour \rightarrow^* mène à une forme normale.

Alors, bien sûr

Théorème

Si un terme est normalisable, il a une unique forme normale.

C'est une conséquence immédiate du théorème de Church-Rosser.
(Pourquoi?)

Définitions et théorèmes (3)

Remarquons qu'il existe des termes non normalisables : soit $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$. On a

$$\Omega \rightarrow_0 \Omega \rightarrow_0 \Omega \rightarrow_0 \dots$$

Il existe aussi des termes normalisables qui ne sont pas fortement normalisables.

C'est le cas le $(\lambda xy.y)\Omega$. Si l'on choisit de réduire d'abord le redex qui se trouve à l'intérieur de Ω , et de continuer ensuite dans cette voie, on est perdu. Sinon, c'est-à-dire si l'on réduit le « redex de tête » (qui est le terme lui-même), on a gagné, car Ω disparaît. Cet exemple laisse entrevoir que le choix de la stratégie de réduction est crucial en λ -calcul.

réduction standard (1)

On remarque facilement que tout λ -terme M est de la forme

$$\lambda x_1 x_2 \cdots x_n. M_1 M_2 \cdots M_k$$

où M_1 est soit une variable, soit une abstraction.

Définition

Si M_1 est une variable x , cette variable est appelée variable de tête de M . On dit alors que M est en forme normale de tête.

Dans le cas contraire, on a $M_1 = \lambda y. N_1$, et le redex $(\lambda y. N_1) M_2$ est appelé « redex de tête » de M . La stratégie standard consiste

- ▶ dans le cas où il y a un redex de tête, à le réduire,
- ▶ et si, par contre, M est en forme normale de tête, à appliquer la réduction standard à chacun des M_2, \dots, M_k (ce sont des réductions indépendantes; on pourrait les mener en parallèle).

Voici (sans démonstration) le résultat annoncé :

Théorème

Appliquée à un terme normalisable, la réduction standard termine.

réduction standard (2)

Deux situations sont possibles, quand on applique la réduction standard à un terme :

- ▶ on aboutit à une forme normale de tête. Le terme est alors dit solvable.
- ▶ Cela ne termine pas, et il n'y a jamais de forme normale de tête. Terme non solvable. C'est le cas de Ω .

Un terme solvable n'est pas forcément normalisable ; il se peut que la réduction standard produise une suite infinie de formes normales de tête. On peut alors voir chaque variable de tête successive comme un « bout d'information » sur une donnée infinie qu'on n'atteindra jamais dans sa totalité. Exemple : soit $A = \lambda xy.y(xx)$ alors le terme AA est de cette sorte, puisqu'en effet :

$$AA \rightarrow \lambda y.y(AA) \rightarrow \lambda y.y(\lambda y.y(AA)) \rightarrow \dots$$

et on produit ainsi la liste des variable de tête $y, y \dots$

réduction standard (3)

Pour finir, voici un exemple qui montre que la réduction standard n'est pas optimale en général. Soit $I = \lambda x.x$ l'identité. On considère $B = (\lambda y.yy)(II)$.

Si on applique la stratégie standard, on obtient :

$$B \rightarrow II(II) \rightarrow I(II) \rightarrow II \rightarrow I$$

mais on aurait pu réduire d'abord à droite (le redex II) dans B , ce qui aurait donné par exemple :

$$B \rightarrow (\lambda y.yy)I \rightarrow II \rightarrow I$$

soit trois étapes au lieu de quatre.